数理解析研究所講究録
820巻 1993年 147-156



# 拡大 affine ルート系の Weyl 群の関係式と $A_1^{(1,1)}$ の alcove

早大理工 竹林忠吉 (Tadayoshi Takebayashi)

拡大 affine ルート系は、斎藤恭司氏によって定義され、分類された。ここではその中の type $A_\ell^{(1,1)}$ の Weyl 群の関係式を与え、それを使って $A_1^{(1,1)}$ の alcove を書き上げる。

## §1. 拡大 affine ルート系の定義 (K. Saito)

$F$ : 有限次元実ベクトル空間

$I$ : $F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ 対称双線型形式

部分集合 $R \subset F$ が $I$ に属するルート系であるとは、

i) $R$ で生成される $F$ の部分加群を $Q(R)$ とすると $Q(R)$ は $F$ の格子となる。 i.e. $Q(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq F$

ii) $R$ の元はすべて non-isotropic

i.e. $I(\alpha,\alpha) \neq 0$ , $\forall \alpha \in R$

iii) $R$ の任意の元 $\alpha, \beta \in R$ に対し $I(\alpha, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$

ここで $\beta^\vee = 2\beta / I(\beta,\beta)$

iv) reflection $w_\alpha$ for $\forall \alpha \in R$ で $R$ は不変

i.e. $w_\alpha R = R$

v) $R = R_1 \amalg R_2$ かつ $R_1 \perp R_2$ ならば $R_1 = \phi$ 又は $R_2 = \phi$

vi) $I$ は positive semi-definite でその radical

$$\mathrm{rad}\, I = \{ x \in F : I(x, y) = 0 \quad \forall y \in F \}$$

の rank が $\mathbb{R}$ 上 2 である。

(注) rad $I$ の rank が 1 なら affine ルート系であり、rank が 0 なら有限ルート系である。

$A_\ell^{(1,1)}$ $(\ell \geqq 1)$ のルート系

$$\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) + nb + ma \qquad (1 \leqq i < j \leqq \ell+1)$$
$$(n, m \in \mathbb{Z})$$

ここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{\ell+1}$ は $I(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$ をみたす正規直交ベクトルである。

このとき
$$F = \underbrace{\mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b}_{\text{radical}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})$$

とかける。

この Weyl 群の関係式を与える前に affine $\tilde{A}_\ell$ の Weyl 群の復習をしておく。

$\hat{A}_\ell$ のルート系は

$$\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) + n\mathscr{b} \quad (1 \leqq i < j \leqq \ell+1), \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で与えられ，この basis を

$$\alpha_0 = \varepsilon_{\ell+1} - \varepsilon_1 + \mathscr{b}, \quad \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \quad (1 \leqq i \leqq \ell)$$

とし，対応する reflection を $w_i := w_{\alpha_i}$ とすると，$w_i$ たちの定義関係式は，

$$\begin{cases} w_i^2 = 1 & (0 \leqq i \leqq \ell) \\ w_i w_j w_i = w_j w_i w_j & (i = j \pm 1) \\ w_i w_j = w_j w_i & (i \neq j \pm 1) \end{cases}$$

ここで $w_{\ell+1} = w_0$ と考える。

$A_\ell^{(1,1)}$ のルート系の場合には，basis を

$$\alpha_0 = \varepsilon_{\ell+1} - \varepsilon_1 + \mathscr{b}, \quad \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \quad (1 \leqq i \leqq \ell)$$

$$\alpha_{\ell+1} = \varepsilon_{\ell+1} - \varepsilon_1 + a$$

ととり対応する reflection を $w_i := w_{\alpha_i}$ とすると，$w_i$ たちの定義関係式は次のようになる．

定理 (i) $\ell = 1$ のとき $w_i^2 = 1 \quad (0 \leqq i \leqq 2)$

$$(w_0 w_1 w_2)^2 = 1$$

(ii) $\ell \geqq 2$ のとき

$$w_i^2 = 1 \quad (0 \leqq i \leqq \ell+1)$$

$$w_i w_j w_i = w_j w_i w_j \qquad (1 \leqq i, j \leqq \ell, \quad i = j \pm 1)$$

$$w_i w_j = w_j w_i \qquad (1 \leqq i, j \leqq \ell, \quad i \neq j \pm 1)$$

$$(*) \begin{cases} w_0 w_1 w_0 = w_1 w_0 w_1 \\ w_0 w_\ell w_0 = w_\ell w_0 w_\ell \\ w_0 w_i = w_i w_0 \qquad (i \neq 1, \ell, \ell+1) \end{cases}$$

$(*)$ で $0 \longleftrightarrow \ell+1$ としたもの

そして

$$w_0 w_1 w_0 w_2 w_3 \cdots\cdots w_\ell w_{\ell+1} = w_{\ell+1} w_1 w_0 w_2 w_3 \cdots\cdots w_\ell w_0$$

さらに $\ell \geqq 3$ のときは，

$$w_0 w_1 w_0 \cdot w_\ell w_{\ell+1} w_\ell = w_\ell w_{\ell+1} w_\ell \cdot w_0 w_1 w_0$$

証明は [2] を参照。

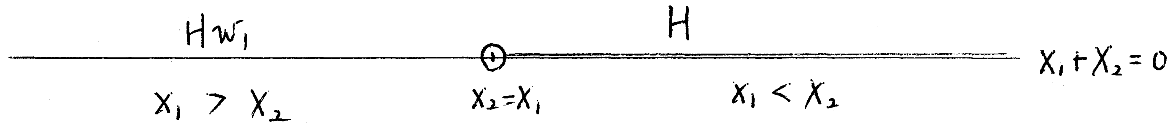
## §2. $A_\ell^{(1,1)}$ の alcove.

有限ルート系 $A_1$ の alcove は次のようになる.

$V = \{ (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_1 + X_2 = 0 \}$ とおき，

$v = (X_1, X_2) \in V$ への $A_1$ の Weyl 群の作用を

$v \cdot w_1 = (X_2, X_1)$ で与える.

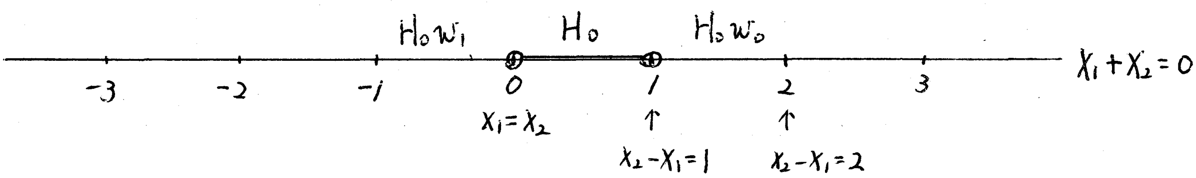


連結成分 H, $Hw_1$ をそれぞれ alcove という。

affine ルート系 $\tilde{A}_1$ の alcove は次のようになる。
$V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$, $v \in V$ に対する
$\tilde{A}_1$ の Weyl 群の作用を

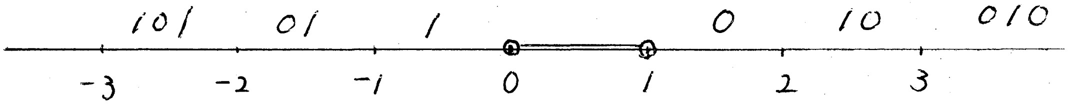
$$\begin{cases} v \cdot w_0 = (x_2 - 1,\ x_1 + 1) \\ v \cdot w_1 = (x_2,\ x_1) \end{cases}$$

で与える。 $H_k := \{(x_1, x_2) \in V \mid x_1 + k < x_2 < x_1 + k + 1\}$
とおくと, $(H_k) \cdot w_0 = H_{-k+1}$ , $(H_k) \cdot w_1 = H_{-k-1}$ となるので,




これより, $w_0$ は $x_2 - x_1 = 1$ に対する対称変換,
$w_1$ 〃 $= 0$ 〃

であることが分り, $\tilde{A}_1$ の alcove は




となる。

拡大 affine ルート系 $A_1^{(1,1)}$ の場合には,

$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 + z_2 = 0\}$ とし,

$z_i = X_i + \sqrt{-1}\, Y_i \quad (i=1,2)$ とおく.

$\tilde{V} = \{(X_1, X_2, Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid X_1 + X_2 = 0,\ Y_1 + Y_2 = 0\}$

とすると $V \cong \tilde{V}$ となる。

$v \in V$ への $A_1^{(1,1)}$ の Weyl 群の作用を

$$\begin{cases} v \cdot w_0 = (z_2 - 1,\ z_1 + 1) \\ v \cdot w_1 = (z_2,\ z_1) \\ v \cdot w_2 = (z_2 - i,\ z_1 + i) \end{cases}$$

で与える。

これを $\tilde{V}$ で考えると, $\tilde{v} \in \tilde{V}$ に対して

$$\begin{cases} \tilde{v} \cdot w_0 = (X_2 - 1,\ X_1 + 1,\ Y_2,\ Y_1) \\ \tilde{v} \cdot w_1 = (X_2,\ X_1,\ Y_2,\ Y_1) \\ \tilde{v} \cdot w_2 = (X_2,\ X_1,\ Y_2 - 1,\ Y_1 + 1) \end{cases}$$

となる。

$$H_{k,m} = \{(X_1, X_2, Y_1, Y_2) \in \tilde{V} \mid X_1 + k < X_2 < X_1 + k + 1,\ Y_1 + m < Y_2 < Y_1 + m + 1\}$$

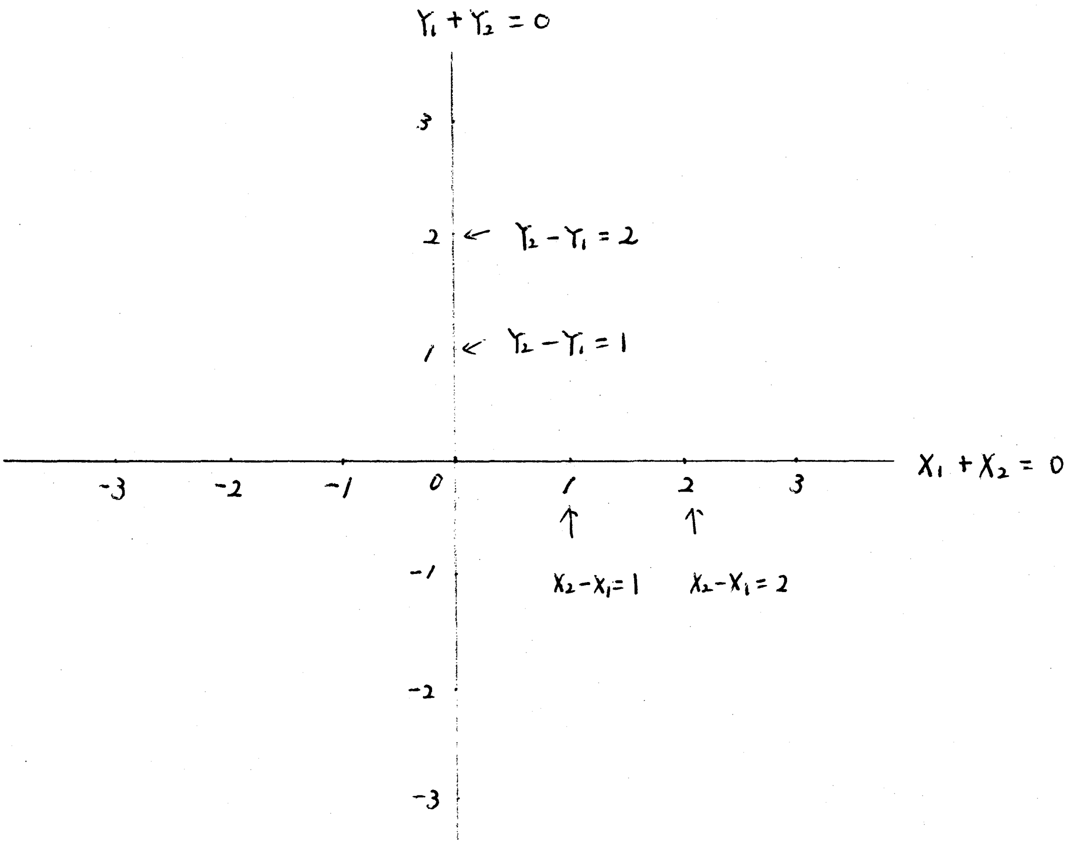
とおくと

命題 $(H_{k,m}) \cdot w_0 = H_{-k+1,\,-m+1}$

$(H_{k,m}) \cdot w_1 = H_{-k-1,\,-m-1}$

$(H_{k,m}) \cdot w_2 = H_{-k-1,\,-m+1}$

これより下の図で



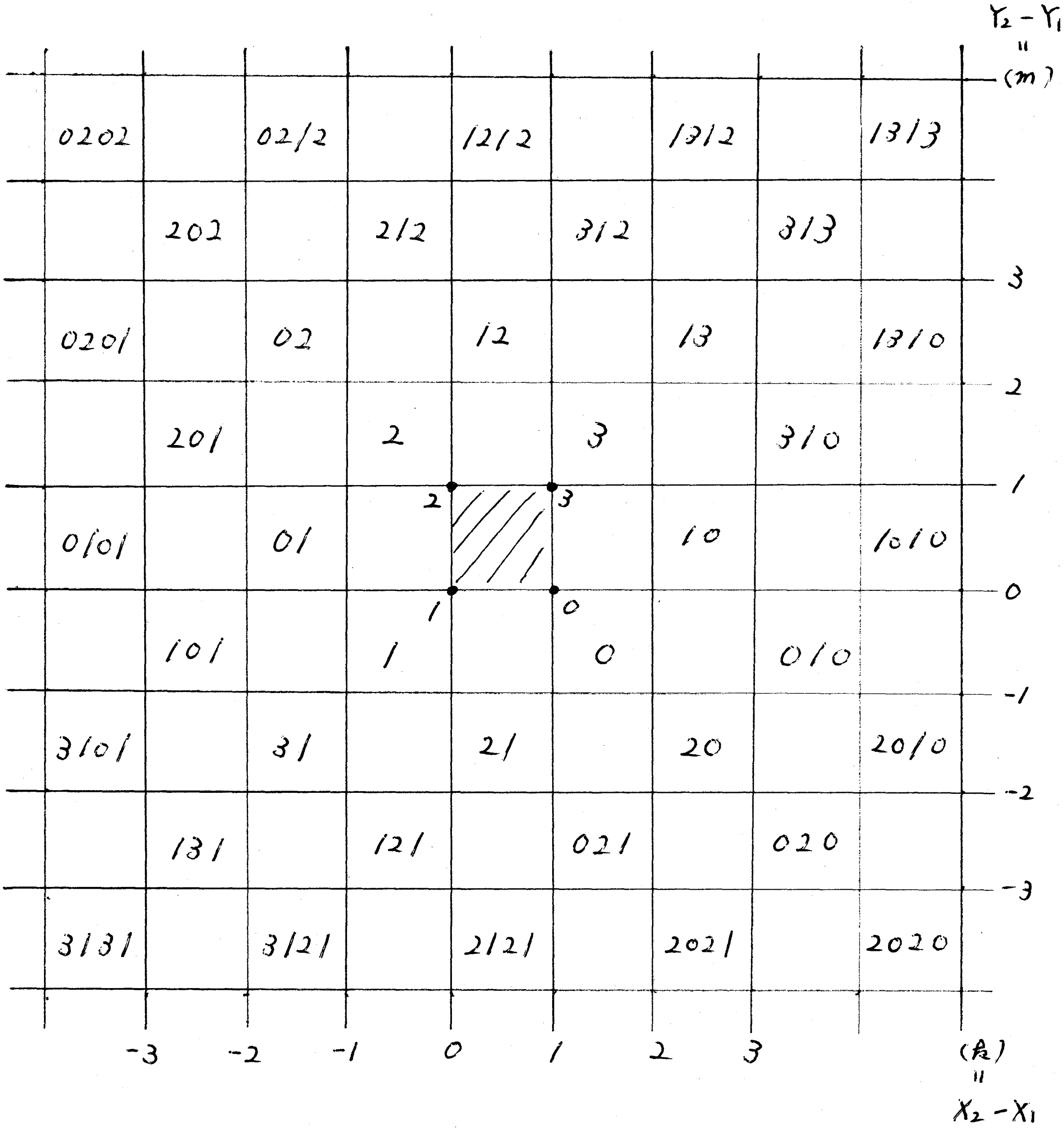

$w_0$ は　$X_2 - X_1 = 1$ ，$Y_2 - Y_1 = 0$ の交点に対する対称変換，

$w_1$ は　　　$= 0$ ，　　$= 0$ 　　　〃

$w_2$ は　　　$= 0$ ，　　$= 1$ 　　　〃

であることがわかる．

$w_i = i$ とかき, $012 = 3$ とおくと




これより一つの基本領域だけではすべてをつくすことができないことが分る。有限ルート系, affine ルート系の場合には, すべての type で一つの基本領域でよいことが分っ

ている。この場合には，二つの基本領域で次のようになる。

$A_1^{(1,1)}$ の alcove

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0202 | **202** | 0212 | **212** | 1212 | **312** | 1312 | **313** | 1313 |
| **0202** | 202 | **0212** | 212 | **1212** | 312 | **1312** | 313 | **1313** |
| 0201 | **201** | 02 | **2** | 12 | **3** | 13 | **310** | 1310 |
| **0201** | 201 | **02** | 2 | **12** | 3 | **13** | 310 | **1310** |
| 0101 | **101** | 01 | **1** | | **0** | 10 | **010** | 1010 |
| **0101** | 101 | **01** | 1 | | 0 | **10** | 010 | **1010** |
| 3101 | **131** | 31 | **121** | 21 | **021** | 20 | **020** | 2010 |
| **3101** | 131 | **31** | 121 | **21** | 021 | **20** | 020 | **2010** |
| 3131 | **13121** | 3121 | **12121** | 2121 | **02121** | 2021 | **02021** | 2020 |

−3 −2 −1 0 1 2 3

3 2 1 0 −1 −2 −3

参考文献

1. K. Saito Extended affine root systems I, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 21 (1985), 75-179

2. T. Takebayashi Defining relations of Weyl groups for extended affine root systems, in preparation

3. N. Bourbaki Groups et algebras de Lie, ch. 4-6, Hermann, Paris, 1968

4. Shi Jian-yi The Kazhdan-Lusztig cells in certain affine Weyl groups, Lect. Notes in Math. 1179, Springer, Berlin, 1986